

带可积时滞的非线性中立型微分方程周期解的存在性

黄明辉

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510520)

摘要: 采用 Krasnoselskii 不动点定理证明了带可积时滞的非线性中立型微分方程周期解的存在性. 并推广了 Dib 和 Maroun 的结论.

关键词: 周期解; 不动点; 非线性

中图分类号: 0175.4

文献标志码: A

文章编号: 1007-7162(2014)04-0065-04

Existence of Periodic Solutions for Nonlinear Neutral Differential Equations with Functional Delay

Huang Ming-hui

(School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China)

Abstract: It used a variant of Krasnoselskii's fixed point theorem to show the existence of periodic solutions for nonlinear neutral differential equations with functional delay. The results were obtained by generalizing previous results of Dib and Maroun. An example was given to illustrate the results.

Key words: periodic solution; fixed point; nonlinear

近几年来,不动点理论已经成为研究带时滞积分微分方程的稳定性和周期解的主要方法之一^[1-15]. 例如,方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = -a(t)x(t) + \frac{d}{dt}Q(t, x(t-g(t))) + G(t, x(t), x(t-g(t))), \quad (1)$$

它的特别形式一直都受到许多研究人员的关注. 本文关注的是以下非线性中立型微分方程

$$\frac{d}{dt}x(t) = -a(t)h(x(t)) + \frac{d}{dt}Q(t, x(t-g(t))) + G(t, x(t), x(t-g(t))), \quad (2)$$

其中 $a(t)$, $g(t)$, $h(t)$ 和 $G(t, x, y)$ 在各自定义的区间中是连续的, $Q(t, x)$ 是连续可导函数. 由于方程式(2)出现了非线性项 $h(x(t))$, 不能直接使用不动点定理. 因此本文需要加减一项非线性项. 因此定义两个映射, 其中一个是完全连续的, 另外一个是大压缩的.

1 准备工作

设 $T > 0$, 定义集合 $P_T = \{\varphi \in C(\cdot, \cdot): \varphi(t+T) = \varphi(t)\}$, $\|x(t)\| = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|$, 其中 C 是连续实值函数空间. 则 $(P_T, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间. 对任意 $L > 0$, 定义

$$M_L = \{\varphi \in P_T: \varphi \leq L, |\varphi'| \leq L'\}, \quad (3)$$

其中 L' 是正实数.

本文做出以下假设:

$$a(t) = a(t+T), g(t) = g(t+T), \quad (4)$$

其中 $g(t)$ 是连续函数, 和 $g(t) \geq g^* > 0$.

$$\int_0^T a(s) ds > 0. \quad (5)$$

同时假设 $Q(t, x)$ 和 $G(t, x, y)$ 是关于 t 的周期函数和关于 x, y 的 Lipschitz 函数, 即

$$Q(t+T, x) = Q(t, x), G(t+T, x, y) = G(t, x, y) \quad (6)$$

存在正数 E_1, E_2, E_3 使得

$$|Q(t, x) - Q(t, y)| \leq E_1 \|x - y\|, \quad (7)$$

$$|G(t, x, y) - G(t, z, w)| \leq E_2 \|x - z\| + E_3 \|y - w\|. \quad (8)$$

引理 1 假设式(4)和(6)成立. 如果 $x(t) \in P_T$, 则 $x(t)$ 是方程(1)的解当且仅当

$$x(t) = Q(t, x(t - g(t))) + (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \times \int_{t-T}^t [a(u)H(x(u)) + G(u, x(u), x(u - g(u))) - a(u)Q(u, x(u - g(u)))] e^{-\int_u^t a(s) ds} du, \quad (9)$$

其中 $H(x(u)) = x(u) - h(x(u))$.

证明 设 $x(t) \in P_T$ 是式(1)的一个解. 首先将式(1)写成以下形式

$$\frac{d}{dt}x(t) + a(t)x(t) = a(t)H(x(t)) + \frac{d}{dt}Q(t, x(t - g(t))) + G(t, x(t), x(t - g(t))).$$

上式两边同时乘以 $e^{\int_0^t a(s) ds}$ 以及对 t 从 $t - T$ 到 t 进行积分得 $\int_{t-T}^t [x(u)e^{\int_0^u a(s) ds}]' du = \int_{t-T}^t [a(u)H(x(u)) + \frac{d}{du}Q(u, x(u - g(u))) + G(u, x(u), x(u - g(u)))] e^{\int_0^u a(s) ds} du$.

因此得到

$$x(t)e^{\int_0^t a(s) ds} - x(t - T)e^{\int_0^{t-T} a(s) ds} = \int_{t-T}^t [a(u)H(x(u)) + \frac{d}{du}Q(u, x(u - g(u))) + G(u, x(u), x(u - g(u)))] e^{\int_0^u a(s) ds} du.$$

两边同时除以 $e^{\int_0^t a(s) ds}$, 以及由于 $x(t) = x(t + T)$, 得到

$$x(t) = (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \int_{t-T}^t [a(u)H(x(u)) + \frac{d}{du}Q(u, x(u - g(u))) + G(u, x(u), x(u - g(u)))] e^{-\int_u^t a(s) ds} du = Q(t, x(t - g(t))) + (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \int_{t-T}^t [a(u)H(x(u)) + G(u, x(u), x(u - g(u))) - a(u)Q(u, x(u - g(u)))] e^{-\int_u^t a(s) ds} du.$$

得证.

定义 1^[15] 设 (M, d) 是一个完备度量空间和 $B: M \rightarrow M$. B 是一个大压缩的. 如果 $\phi, \varphi \in M$, 当 $\phi \neq \varphi$ 时, 有 $d(B\phi, B\varphi) < d(\phi, \varphi)$ 和对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta < 1$, 使得 $[\phi, \varphi \in M, d(\phi, \varphi) \geq \varepsilon] \Rightarrow d(B\phi, B\varphi) \leq \delta d(\phi, \varphi)$.

下一个定理是 Krasnoselskii's 不动点定理, 它是构成我们重要结论的主要定理.

定理 1^[15] 设 M 是 Banach 空间 $(S, \|\cdot\|)$ 的一个有界凸非空子集. 假设 A 和 B 将 M 投影到 M , 以及:

- (1) 对所有 $x, y \in M$, 有 $Ax + By \in M$;
- (2) A 是连续的和 AM 包含在 M 的一个紧子集中;
- (3) B 是一个大压缩.

则存在一个 $z \in M$, 使得 $z = Az + Bz$.

2 周期解的存在性

首先定义一个映射 P :

$$(P\varphi)(t) = Q(t, \varphi(t - g(t))) + (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \int_{t-T}^t [a(u)H(\varphi(u)) + G(u, \varphi(u), \varphi(u - g(u))) - a(u)Q(u, \varphi(u - g(u)))] e^{-\int_u^t a(s) ds} du \quad (10)$$

为了使用定理 1, 需要将映射 P 表示成两个映射之和, 其中一个是完全连续映射, 另一个是压缩映射.

设 $(P\varphi)(t) = A\varphi(t) + B\varphi(t)$, 其中 $A, B: P_T \rightarrow P_T$ 定义为

$$(A\varphi)(t) = Q(t, \varphi(t - g(t))) + (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \int_{t-T}^t [G(u, \varphi(u), \varphi(u - g(u))) - a(u)Q(u, \varphi(u - g(u)))] e^{-\int_u^t a(s) ds} du \quad (11)$$

和

$$(B\varphi)(t) = (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \int_{t-T}^t a(u)H(\varphi(u)) e^{-\int_u^t a(s) ds} du. \quad (12)$$

还需要假设:

$$(E_2 + E_3)L + |G(t, 0, 0)| \leq \beta La(t), \quad (13)$$

$$E_1 L + |Q(t, 0)| \leq \alpha L, \quad (14)$$

$$J(2\alpha + \beta) \leq 1, \quad (15)$$

其中 α, β, L 和 J 是常数, 以及 $J \geq 3$.

存在正数 M , 使得 $\left| \frac{d}{dt}Q(t, x(t - g(t))) \right| \leq M$,

$$x \in M_L. \quad (16)$$

引理 2 假设条件(4)-(8)和(13)-(15)成立. L 是式(3)中所定义的, $A: M_L \rightarrow M_L$ 是连续的和将 M 投影到 M 的一个紧集中.

证明 在式(12)中变量的改变可以证明 $(A\varphi)(T + t) = (A\varphi)(t)$. 注意到

$$|Q(t, x)| \leq |Q(t, x) - Q(t, 0)| + |Q(t, 0)| \leq$$

$$E_1 \|x\| + |Q(t, 0)|,$$

以及

$$|G(t, x, y)| \leq |G(t, x, y) - G(t, 0, 0)| + |G(t, 0, 0)| \leq E_2 \|x\| + E_3 \|y\| + |G(t, 0, 0)|.$$

首先证明 A 将 M_L 投影到本身. 因此, 对任意 $\varphi \in M_L$, 有

$$\begin{aligned} |(A\varphi)(t)| &\leq |Q(t, \varphi(t - g(t)))| + (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \left| \int_{t-T}^t G(u, \varphi(u), \varphi(u - g(u))) e^{-\int_u^t a(s) ds} du \right| + \\ & (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \left| \int_{t-T}^t a(u) Q(u, \varphi(u - g(u))) e^{-\int_u^t a(s) ds} du \right| \leq \\ E_1 \|\varphi\| + |Q(t, 0)| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \left| \int_{t-T}^t [(E_2 + E_3) \|\varphi\| + |G(u, 0, 0)|] e^{-\int_u^t a(s) ds} du \right| + \\ & (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \left| \int_{t-T}^t a(u) (E_1 \|\varphi\| + |Q(u, 0)|) e^{-\int_u^t a(s) ds} du \right| \leq \\ & (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \left| \int_{t-T}^t \beta L a(u) e^{-\int_u^t a(s) ds} du \right| + 2\alpha L \leq \\ & (2\alpha + \beta)L \leq \frac{L}{J} < L. \end{aligned}$$

证毕.

接着证明 A 是连续的. 设 $\varphi, \phi \in M_L$, 令

$$\begin{aligned} \eta &= \max_{t \in [0, T]} (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s) ds})^{-1}, \theta = \max_{t \in [0, T]} |a(t)|, \\ \nu &= \max_{s \in [t-T, t]} e^{-\int_s^t a(u) du}. \end{aligned} \quad (17)$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{N}$, 使得当 $\|\phi - \varphi\| \leq \delta$,

有

$$\begin{aligned} |(A\phi)(t) - (A\varphi)(t)| &\leq E_1 \|\phi - \varphi\| + \\ & (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s) ds})^{-1} \int_{t-T}^t (E_2 + E_3) \|\phi - \varphi\| e^{-\int_u^t a(s) ds} du + \\ & (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s) ds})^{-1} \int_{t-T}^t a(u) E_1 \|\phi - \varphi\| e^{-\int_u^t a(s) ds} du \leq \\ & [2E_1 + \eta T \nu (E_2 + E_3)] \|\phi - \varphi\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

其中, $N = 2E_1 + \eta T \nu (E_2 + E_3)$. 证毕.

接着证明 A 是紧的.

设 $\varphi_n \in M_L$, n 是正整数. 故有 $(A\varphi_n)(t) \leq L$.

直接计算, 得 $(A\varphi_n)'(t) = \frac{d}{dt} Q(t, \varphi_n(t - g(t))) - a(t) Q(t, \varphi_n(t - g(t))) + G(u, \varphi_n(u), \varphi_n(u - g(u))) - a(t) (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \int_{t-T}^t [G(u, \varphi_n(u), \varphi_n(u - g(u))) - a(u) Q(u, \varphi_n(u - g(u)))] e^{-\int_u^t a(s) ds} du$.

$$g(u))) - a(u) Q(u, \varphi_n(u - g(u)))] e^{-\int_u^t a(s) ds} du.$$

由式(13)、(14)、(16)、(17)得

$$|(A\varphi_n)'(t)| \leq M + \theta\alpha L + \theta\beta L + \theta\eta T[(\theta\alpha L + \theta\beta L)\nu] \leq d,$$

存在正实数 d . 因此数列 $(A\varphi_n)$ 是一致有界和等度连续的. 由 Ascoli-Arzelà 定理可知, A 是紧的.

引理3 假设式(4)-(6)和或(13)-(15)成立. L 是式(3)中所定义的, 同时假设

$$(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \int_{t-T}^t |a(u) H(\varphi(u))| \times e^{-\int_u^t a(s) ds} du \leq \frac{J-1}{J} L, \quad (18)$$

对任意 $\varphi \in M_L$ 成立, A, B 分别是式(11)和(12)所定义的, 对任意 $\varphi, \phi \in M_L$, 有

$$A\varphi + B\phi: M_L \rightarrow M_L.$$

证明 对任意 $\varphi, \phi \in M_L$, 由 B 的定义和引理2的结论, 得到

$$\begin{aligned} |(A\varphi)(t) + (B\phi)(t)| &\leq |Q(t, \varphi(t - g(t)))| + \\ & (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \left| \int_{t-T}^t G(u, \varphi(u), \varphi(u - g(u))) e^{-\int_u^t a(s) ds} du \right| + \\ & (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \left| \int_{t-T}^t a(u) Q(u, \varphi(u - g(u))) e^{-\int_u^t a(s) ds} du \right| + \\ & (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u) du})^{-1} \left| \int_{t-T}^t |a(u) H(\phi(u))| e^{-\int_u^t a(s) ds} du \right| \leq \frac{L}{J} + \\ & \frac{(J-1)L}{J} = L. \end{aligned}$$

因此 $A\varphi + B\phi \in M_L$.

下一个引理将证明映射 B 在 M_L 上是大压缩的, 这个引理的证明读者可以参考文献[15]. 最后, 对函数 $h: R \rightarrow R$ 作出以下假设:

- (1) h 在区间 $U_L = [-L, L]$ 上是连续可导的.
- (2) h 在区间 $U_L = [-L, L]$ 上严格递增.
- (3) $\sup_{s \in U_L} h'(s) \leq 1$.
- (4) $(s - r) \{ \sup_{t \in U_L} h'(t) \} \geq h(s) - h(r) \geq (s - r) \{ \inf_{t \in U_L} h'(t) \} \geq 0$, 其中 $s, r \in U_L$ 以及 $s \geq r$.

引理4 [15] 设函数 h 满足假设(1)~(4). L 是式(3)所定义的, 则映射 B 是一个大压缩.

定理2 假设条件式(4)~(8)、式(13)~(15)和式(18)成立, 以及函数 h 满足假设(1)~(4), 则方程式(2)在 $M_L = \{\phi \in P_T: \|\phi\| \leq L, |\phi'| \leq L'\}$ 存在一个周期解.

证明 由引理(1)可知, $A\phi + B\phi \in M_L$ 是方程式(2)的一个解, 如果

$$\phi = A\phi + B\phi.$$

根据引理(2), $A:M_L \rightarrow M_L$ 是连续的和 M_L 包含在 M_L 紧集中. $A\phi + A\varphi \in M_L$, 对任意的 $\phi, \varphi \in M_L$. 而且根据式(12), B 是一个大压缩. 显然, 满足 Krasnoselskii's 不动点定理. 因此, 存在一个不动点 $\phi \in M_L$ 使得 $\phi = A\phi + B\phi$. 因此方程(12)有一个周期为 T 的解.

3 实例

非线性微分方程:

$$x'(t) = -\frac{1}{4}\left[\frac{15}{16}x(t) - \frac{L}{16}\sin\left(\frac{x(t)}{L}\right)\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{10^{-3}}{L}\sin(t)x^2(t-1)\right] + \frac{10^{-3}}{L}\cos(t)x^2(t-1), \quad (19)$$

$$\text{其中 } T = 2\pi, a(t) = \frac{1}{4}, h(t) = \frac{15}{16}t - \frac{L}{16}\sin\left(\frac{t}{L}\right), \\ H(x(t)) = \frac{1}{16}x(t) + \frac{L}{16}\sin\left(\frac{x(t)}{L}\right), Q(t, x) = \frac{10^{-3}}{L}x^2\sin t, G(t, x, y) = \frac{10^{-3}}{L}y^2\cos t, g(t) = 1.$$

显然式(4)~(6)成立. 通过直接计算, 得

$$h'(t) = \frac{15}{16} - \frac{1}{16}\cos\left(\frac{t}{L}\right),$$

故满足假设(1)~(4).

$$\left|\frac{d}{dt}Q(t, x(t-g(t)))\right| = \left|\frac{10^{-3}}{L}[x^2(t-1)\cos(t) + 2x(t-1)x'(t-1)\sin(t)]\right| \leq 10^{-3}(L+2L'),$$

因此式(16)成立.

$$E_1 = E_3 = 2 \times 10^{-3}, E_2 = 0, \alpha = 2 \times 10^{-3}, \beta = 8 \times 10^{-3}.$$

由式(15)得

$$3 \leq J \leq (1.2 \times 10^{-2})^{-1}, \quad (20)$$

$$\eta = (1 - e^{-\frac{\pi}{2}})^{-1}, \theta = \frac{1}{4}, \nu = 1.$$

$$(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(u)du})^{-1} \int_{t-T}^t |a(u)H(\varphi(u))| e^{-\int_u^t a(s)ds} du \leq (1 - e^{-\frac{\pi}{2}})^{-1} \frac{\pi}{16} L \leq 0.3L.$$

$$\text{又由式(20)可知, } \frac{2}{3}L \leq \frac{J-1}{J}L, L \in [3, (1.2 \times 10^{-2})^{-1}].$$

故式(19)成立.

故式(19)在 $M_L = \{\phi \in P_{2\pi} : \|\phi\| \leq L, |\phi'| \leq L'\}$ 上存在一个周期为 2π 的解.

参考文献:

- [1] Burton T A. Liapunov functionals, fixed points and stability by Krasnoselskii's theorem[J]. Nonlinear Stud, 2002,9: 181-190.
- [2] Burton T A. Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations[M]. New York: Dover Publications, 2006.
- [3] Burton T A. A fixed point theorem of Krasnoselskii[J]. App Math Lett 1998(11): 85-88.
- [4] T A Burton. Stability and Periodic Solutions of Ordinary Functional Equations[M]. New York: Academic Press, 1985.
- [5] Burton T A, Furumochi T. Krasnoselskii's fixed point theorem and stability[J]. Nonlinear Anal, 2002,4(49):445-454.
- [6] Dib Y M, Maroun M R. Periodicity and stability in neutral nonlinear differential equations with functional delay, Electron[J]. J Differential Equations, 2005,142:1-11.
- [7] Gopalsamy K, Zhang B G. On a periodic neutral logistic equation[J]. Glasg Math J, 1991,33:281-286.
- [8] Kaufmann E R. A nonlinear neutral periodic differential equation[J]. Electron J Differential Equations, 2010,88:1-8.
- [9] Kun L Y. Periodic solution of a periodic neutral delay equation[J]. J Math Anal Appl, 1997,214:11-21.
- [10] Maroun M, Raffoul Y N. Periodic in nonlinear neutral delay equations with functional delay[J]. J Korean Math Soc, 2005,42:255-268.
- [11] Raffoul Y N. Periodic solutions for neutral nonlinear differential equations with functional delay[J]. Electron J Differential Equations, 2003,102:1-7.
- [12] Raffoul Y N. Positive periodic solutions in neutral nonlinear differential equations[J]. Electron J Qual Theory Diff Equa, 2007,16:1-10.
- [13] Raffoul Y N. Periodic solutions for scalar and vector nonlinear difference equations, Panamer[J]. Math J, 1999, 9:97-111.
- [14] Raffoul Y N. Stability in neutral nonlinear differential equations with functional delay using fixed point theory[J]. Math Comput Modelling, 2004,40(7-8):691-700.
- [15] Yankson E. Existence of periodic solutions for totally nonlinear neutral differential equations with functional delay[J]. Opuscula Mathematica, 2012,32(3): 617-627.